SPAZIO CARTESIANO

Classe: 4 E Liceo Scientifico S.A.

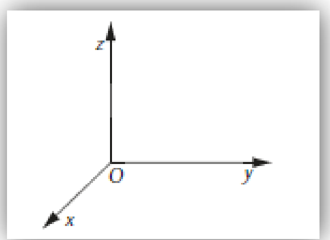
A.S. 2017/2018

Prof. Giuseppe Scippa

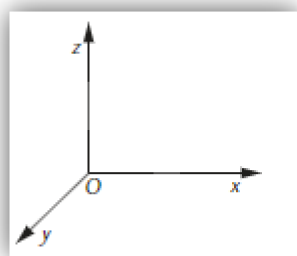
1) Introduzione alla geometria analitica nello spazio

1a) Sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio.

- Si considerano tre rette a due a due ortogonali, dette asse *x*, asse *y* e asse *z*. Si chiama origine del sistema di riferimento il punto attraverso il quale passano le rette;
- Si orientano i tre assi e si considera su di essi una unità di misura; l'orientamento può essere sia destro che sinistro.

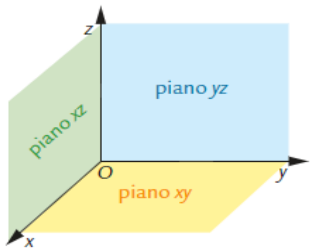


Orientamento destro



Orientamento sinistro

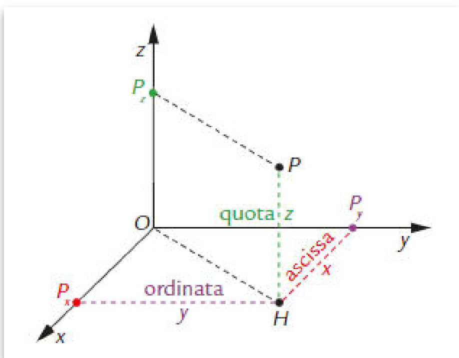
- Il piano che contiene gli assi *x* e *y* è detto piano *xy*;
- Il piano che contiene gli assi *x* e *z* è detto piano *xz;*
- Il piano che contiene gli assi *y* e *z* è detto piano *yz*.



I tre piani *xy, xz, yz* sono chiamati piani coordinati. Essi dividono lo spazio in otto parti, detti ottanti.

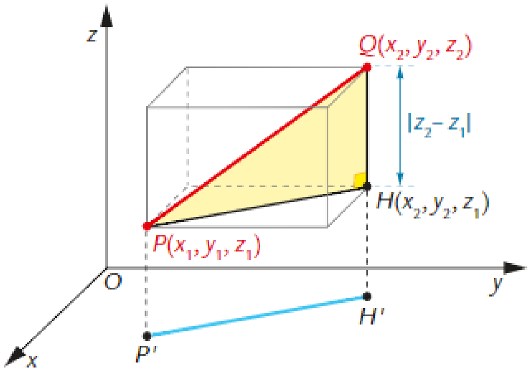
A ogni punto P dello spazio è possibile associare una serie di numeri reali (*x, y, z*), che costituiscono le coordinate del punto P:

- Il numero *x* è detto ascissa di P;
- Il numero *y* è detto ordinata di P;
- Il numero *z* è detto quota di P;



1b) Distanza tra due punti nello spazio

La formula per calcolare la distanza tra due punti può essere estesa in modo naturale nello spazio. Consideriamo due punti P (x_1, y_1, z_1) e Q (x_2, y_2, z_2) e li chiamo con H (x_2, y_2, z_1) la proiezione di Q sul piano passante per P e parallelo al piano xy.



Per il teorema del triangolo rettangolo, applicato al triangolo rettangolo PHQ risulta:

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{PH}^2 + \overline{QH}^2}$$

La distanza tra i due punti P de H è uguale alla distanza tra le loro proiezioni P' (x_1, y_1) e H' (x_2, y_2) sul piano xOy:

$$\overline{PH} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

La distanza tra Q e H, essendo due punti aventi stessa ascissa e ordinata, è uguale al valore assoluto della differenza tra le quote:

$$\overline{QH} = |z_2 - z_1|$$

Pertanto: $$\overline{PQ} = \sqrt{\underbrace{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}_{\overline{PH}^2} + \underbrace{(z_2 - z_1)^2}_{\overline{QH}^2}}$$

Nello spazio la distanza d tra due punti di coordinate (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2), è espressa dalla seguente formule:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Il punto medio di un segmento i cui estremi hanno coordinate (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2), viene espresso nel seguente modo: $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

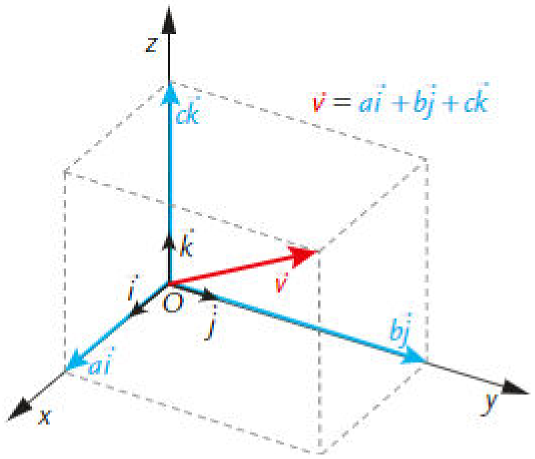
1c) Vettori nello spazio

Per lo studio di rette e piani in uno spazio cartesiano ortogonale, è particolarmente utile avvalersi del linguaggio dei vettori.

Indicati con $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ i versori rispettivamente dell'asse x, dell'asse y e dell'asse z, ogni vettore $\vec{v}$ nello spazio può esprimersi nel seguente modo con la formula: $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}\ c\vec{k}$ essendo *a, b, c* le componenti del vettore $\vec{v}$;

Il modulo di un vettore *di* componenti (*a, b, c*) è dato da: $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

le componenti di un vettore $\vec{v} = \vec{A}$ con A (x_1, y_1, z_1) e B (x_2, y_2, z_2), si ottengono come differenza delle coordinate di B e A: $\vec{v}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$



Operazioni tra vettori nello spazio

Dati nello spazio, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali, due vettori $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$, valgono le seguenti proprietà:

a. il vettore $\vec{u} + \vec{v}$ ha componenti $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$;

b. il vettore $\vec{u} - \vec{v}$ ha componenti $(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$;

c. il vettore $k\vec{u}$, con $k \in \mathbf{R}$, ha componenti (kx_1, ky_1, kz_1);

d. il prodotto scalare $\vec{u} \cdot \vec{v}$ è dato dall'espressione:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Parallelismo e perpendicolarità tra due vettori nello spazio riferito a un sistema di riferimento cartesiano

a. Due vettori non nulli $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$, sono **paralleli** se e solo se esiste $k \in \mathbf{R}$ tale che:

$$\vec{u} = k \cdot \vec{v}$$

Questa condizione, se x_2, y_2, z_2 sono diversi da zero, si può tradurre nella forma:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

b. Due vettori non nulli $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$, sono **perpendicolari** se e solo se il loro prodotto scalare è uguale a zero, vale a dire se è verificata la condizione:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$$

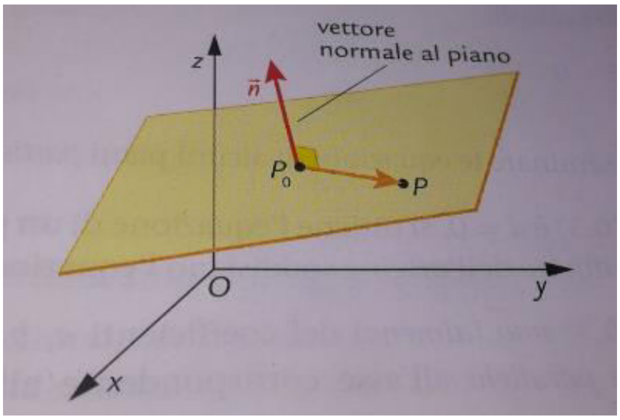
2) Equazione di un piano nello spazio

Determiniamo l’equazione di un piano nello spazio riferito a un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Sappiamo che esiste uno e uno solo piano passante per un punto distinto P e perpendicolare a una retta *r*.

Una volta che sia dato un suo punto P_0 (x_0, y_0, z_0) e un vettore $\vec{n}$ (a, b, c) a esso perpendicolare, il piano resta univocamente determinato. Il vettore è detto vettore normale al piano.

Un generico punto P (x, y, z) appartiene al piano se e solo se il vettore $\overrightarrow{P_0P}$ è ortogonale a $\vec{n}$.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$



2a) Teorema dell’equazione del piano passante per un punto, di dato vettore normale

Considerando che $\vec{n}$= (a, b, c) e $\overrightarrow{P_0P}$= $(x\text{-}x_0,\ y - y_0,\ z\text{-}z_0)$, arrivando al prodotto scalare tra due vettori di cui sono date le componenti:

$$(a,\ b,\ c) * (x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0) = 0$$

Il piano passante per il punto P_0 (x_0, y_0, z_0) e di vettore normale $\vec{n}$ (a, b, c) ha equazione:

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

Sviluppando i calcoli l’equazione diventa:

$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

“$- ax_0 - by_0 - cz_0$” è un generico numero reale *d*.

Pertanto si perviene all’equazione di un piano in forma cartesiana:

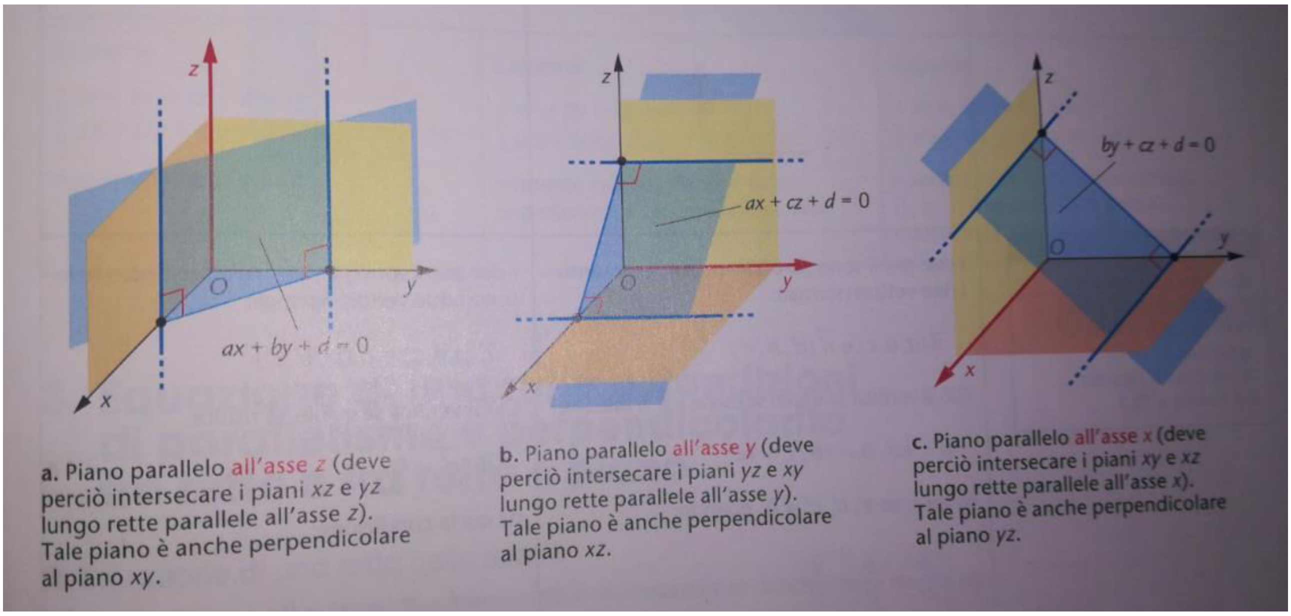
$$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$$

Ciò ci consente di determinare immediatamente un vettore $\vec{n}$ normale al piano.

2b) Equazioni di alcuni piani particolari.

1. Se nell'equazione $ax + by + cz + d = 0$, $d = 0$, si ottiene l'equazione di un piano passante per l'origine (infatti le coordinate dell'origine soddisfano l'equazione del piano).
2. Se nell'equazione $ax + by + cz + d = 0$ uno (almeno) dei coefficienti a, b o c è nullo, si ottiene un piano che risulta parallelo all'asse corrispondente alla variabile mancante:

- Se $c = 0$, si ottiene il piano di equazione $ax + by + d = 0$ in cui manca la variabile z; un piano di questo tipo è parallelo all'asse z: infatti se d è diverso da 0, l'asse x e il piano non hanno punti in comune (perché nessun punto di coordinate $(0, 0, k)$ soddisfa l'equazione del piano)
- Se $d = 0$ l'asse giace sul piano. Un piano siffatto risulta anche perpendicolare al piano xy.
- analoghi ragionamenti possono essere condotti anche negli altri casi.



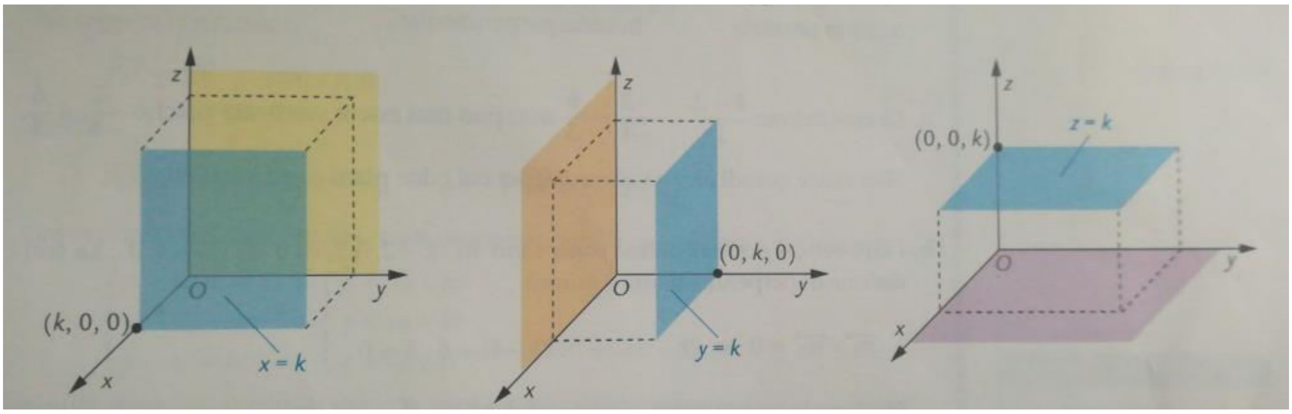
a. Piano parallelo all'asse z (deve perciò intersecare i piani xz e yz lungo rette parallele all'asse z). Tale piano è anche perpendicolare al piano xy.

b. Piano parallelo all'asse y (deve perciò intersecare i piani yz e xy lungo rette parallele all'asse y). Tale piano è anche perpendicolare al piano xz.

c. Piano parallelo all'asse x (deve perciò intersecare i piani xy e xz lungo rette parallele all'asse x). Tale piano è anche perpendicolare al piano yz.

3. Se nell'equazione $ax + by + cz + d = 0$, a, b o c sono nulli, quindi si ottiene un piano parallelo a uno dei piani coordinati.

- Se $b = c = 0$, otteniamo un piano di equazione $ax + d = 0$, ossia $x = \frac{d}{a}$, del tipo $x = k$, ed è parallelo al piano yz.



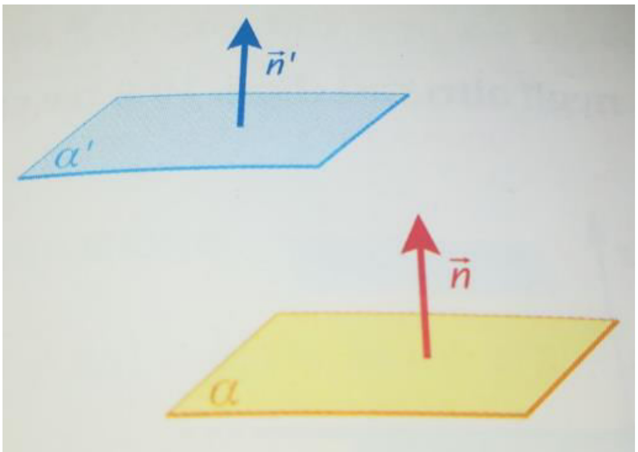
2c) Condizioni di parallelismo e perpendicolarità tra piani

Queste condizioni tra due piani si esprimono in termini di parallelismo e perpendicolarità dei rispettivi vettori normali.

Condizioni di parallelismo tra due piani $\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$ e $\boldsymbol{a^1x + b^1y + c^1z + d^1 = 0}$**:**

i due piani sono paralleli se e solo se lo sono i due vettori normali n e n^1.

Ciò si verifica quando $\boldsymbol{a^1, b^1}$ ***e*** $\boldsymbol{c^1}$ sono diversi da 0.

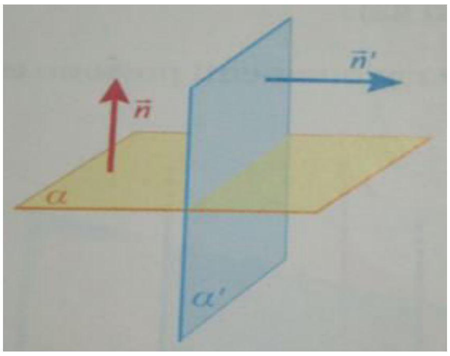


Questa condizione, se x_2, y_2, z_2 sono diversi da zero, si può tradurre nella forma:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

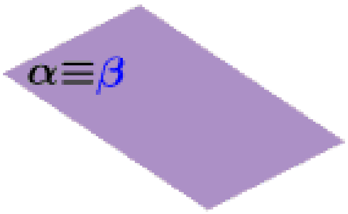
Condizioni di perpendicolarità tra due piani $\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$ e $\boldsymbol{a^1x + b^1y + c^1z + d^1 = 0}$**:**

i due piani sono perpendicolari se e solo se lo sono i due vettori normali n e n^1. Ciò si verifica se e solo se $n*n^1=0$, da cui la condizione: $\boldsymbol{aa^1+bb^1+cc^1=0}$**.**

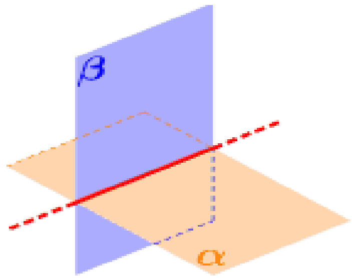


2d) Posizione reciproca di due piani

Dati due piani α e α' di equazioni rispettivamente $\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$ e $\boldsymbol{a^1x + b^1y + c^1z + d^1 = 0}$, vediamo come si può interpretare algebricamente la loro posizione reciproca.



Piani coincidenti



Piani incidenti

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a^1x + b^1y + c^1z + d = 0 \end{cases}$$

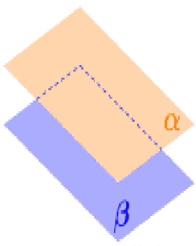
Il sistema è verificato da ogni terna ordinata (x, y, z)

che soddisfa la prima equazione (o la seconda).

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a^1x + b^1y + c^1z + d = 0 \end{cases}$$

Il sistema ammette infinite soluzioni,

tutte appartenenti a una medesima retta.



Piani paralleli

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a^1x + b^1y + c^1z + d = 0 \end{cases}$$

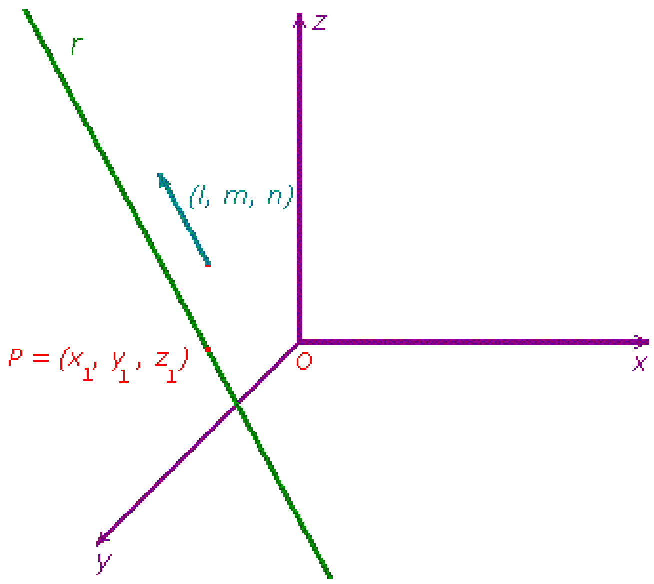
Il sistema non ammette soluzioni

3) Equazione di una retta e condizioni di parallelismo e perpendicolarità tra rette e tra retta e piano

3a) Equazione di una retta nello spazio

Sappiamo che all'interno del piano cartesiano una **retta** è univocamente determinata da un suo *punto* e da un *coefficiente angolare* che se individua la *direzione*. La stessa cosa accade nello spazio; ma con l'unica sostanziale differenza che non sarà un unico numero ad indicare la direziona della retta (coefficiente angolare), bensì una terna di numeri reali, che rappresenta le componenti di un **vettore parallelo** alla retta in questione. Consideriamo dunque una retta r (come indicato nell'immagine) passante per un punto P_0 (x_1, y_1, z_1) e parallela ad un vettore *v* (*l, m, n*). Il vettore $\vec{v}$ è chiamato **"vettore direzione"** della retta *r*. Appare chiaro dunque, che un generico punto P appartiene alla retta se e solo se il vettore P0P è parallelo a *v*, ovvero, se e solo se P0P è multiplo di *v*.

Da queste deduzioni possiamo ricavare le equazioni parametriche di una retta nello spazio:



La retta passante per il punto P_0 (x_0, y_0, z_0) e di vettore direzione $\vec{v}$ (*a, b, c*) ha equazioni parametriche:

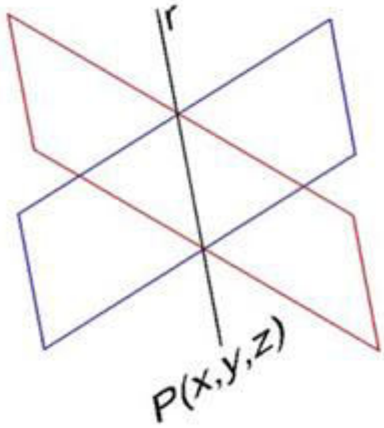
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

se a, b, c ≠ 0, possiamo eliminare il parametro *t* e ottenere le **equazioni cartesiane** della retta:

$$\frac{x-x0}{a} = \frac{y-y0}{b} = \frac{z-z0}{c}$$

3b) Retta individuata da due piani

Una **retta *r*** nello spazio può essere anche individuata *dall'intersezioni di due piani incidenti*. Supposto che le equazioni dei due piani siano rispettivamente ***ax+by+cz+d=0*** e ***a'x+b'y+c'z+d'=0***, la **retta *r*** può essere definita dal sistema che segue:



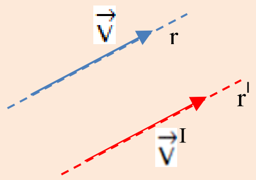
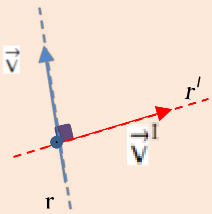
$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

l'equazione del **fascio di piani di sostegno la retta *r*** è:

$$ax + by + cz + d + k\,(a'x+b'y+c'z+d') = 0$$

3c) Condizioni di parallelismo e perpendicolarità tra rette e loro posizione reciproca

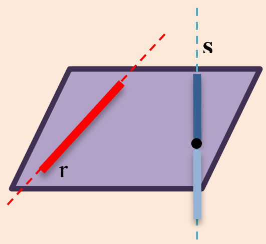
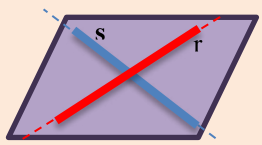
Le direzioni di parallelismo e perpendicolarità tra **due *rette*** si esprimono in termini di parallelismo e perpendicolarità dei rispettivi ***vettori direzione.*** $\vec{v}$

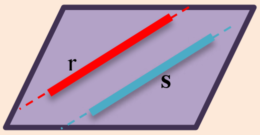
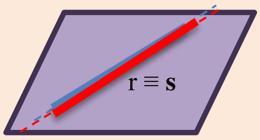
Parallelismo e perpendicolarità tra rette	
Condizione di parallelismo tra due rette di vettori direzione: $\vec{v}\ (l, m, n)$ e $\vec{v}^I\ (l^I, m^I, n^I)$ 	Condizione di perpendicolarità tra due rette di vettori direzione: $\vec{v}\ (l, m, n)$ e $\vec{v}^I\ (l^I, m^I, n^I)$ 
Le due rette sono parallele se e solo se lo sono i due vettori direzione. Ciò si verifica se e solo se esiste k $\in$ R tale che: $l = kl^I, \quad m = km^I, \quad n = kn^I$	Le due rette sono perpendicolari se e solo se lo sono i due vettori direzione. Ciò si verifica se e solo se risulta: $\vec{v} \cdot \vec{v}^I = 0$

ovvero, se $l^I, \; m^I, \; n^I \neq 0$, quando: $\frac{l}{l^I} = \frac{m}{m^I} = \frac{n}{n^I}$	da cui la condizione: $ll^I + mm^I + nn^I = 0$ N.B. Nello spazio due rette possono essere perpendicolari anche se sono sghembe e, quindi, non hanno punti in comune; infatti la perpendicolarità dipende solo dai loro vettori direzione.

3a) Posizione reciproca di due rette nello spazio

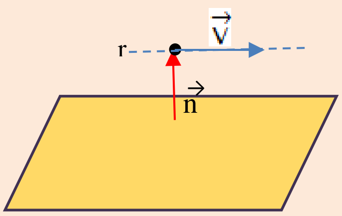
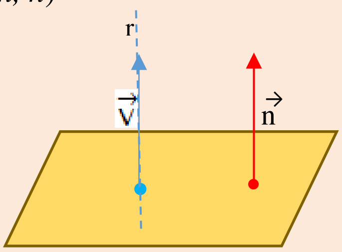
Vediamo, infine, quali condizioni permettono di stabilire, da un punto di vista analitico, la **posizione reciproca di due rette nello spazio**.

Rette sghembe	Rette incidenti
	
I due vettori direzione di r ed s ***non*** sono paralleli e le due rette non hanno punti in comune (il sistema formato dalle loro equazioni è impossibile).	I due vettori direzione di r ed s ***non*** sono paralleli e le due rette hanno un solo punto in comune (il sistema formato dalle loro equazioni ha una sola soluzione).

ette parallele distinte	Rette parallele coincidenti
	
I due vettori direzione di r ed s sono paralleli e le due rette non hanno punti in comune (il sistema formato dalle loro equazioni è impossibile).	I due vettori direzione di r ed s sono paralleli e punto di r appartiene a s (il sistema formato dalle loro equazioni è indeterminato).

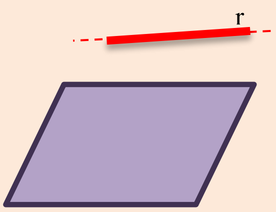
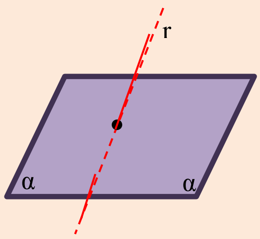
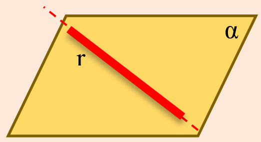
3d) Condizioni di parallelismo e perpendicolarità tra retta e piano e loro posizione reciproca

Le condizioni di **parallelismo e perpendicolarità tra una retta e un piano** si esprimono in termini di parallelismo e perpendicolarità tra il vettore direzione della retta e il vettore normale al piano.

Parallelismo e perpendicolarità tra retta e piano	
Condizione di parallelismo tra: • un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ • una retta di vettore direzione $\vec{v}\ (l, m, n)$ 	Condizione di perpendicolarità tra: • un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ • una retta di vettore direzione $\vec{v}(l, m, n)$ 

La retta è parallela al piano se e solo se il vettore $\vec{n}$ (a, b, c) normale al piano è perpendicolare al vettore direzione $\vec{v}(l, m, n)$ della retta. Ne consegue la condizione: $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ da cui: $la + mb + nc = 0$	La retta è perpendicolare al piano se e solo se il vettore direzione $\vec{v}(l, m, n)$ della retta è parallelo al vettore $\vec{n}$ (a, b, c) normale al piano. Ciò si verifica se e solo se esiste $k \in R$ tale che: $l = ka,\ m = kb,\ n = kc$ ovvero, *se* $a, b, c \neq 0$ quando: $\dfrac{l}{a} = \dfrac{m}{b} = \dfrac{n}{c}$

Vediamo in fine quali condizioni permettono di stabilire, dal punto di vista analitico, la **posizione reciproca tra una retta e un piano**.

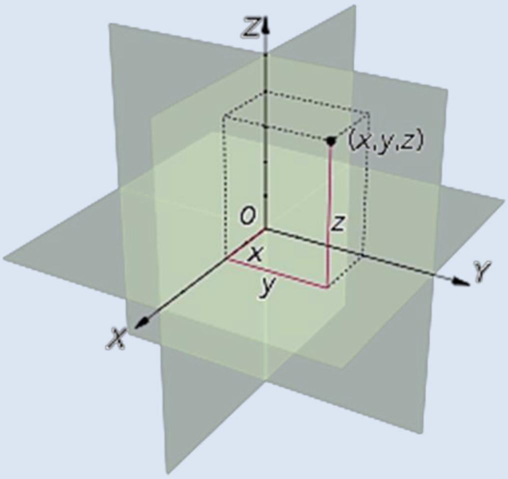
Retta parallele al piano	**Retta incidente il piano**	**Retta che giace sul piano**
		
Il vettore normale al piano è perpendicolare al vettore direzione della retta inoltre piano e retta non hanno punti in comune (ovvero il sistema formato dalle loro equazioni e impossibile).	Il vettore normale al piano ***non*** è perpendicolare al vettore direzione della retta.	Il vettore normale al piano è perpendicolare al vettore direzione della retta e tutti i punti della retta appartengono al piano (ovvero il sistema formato dalle loro equazioni e indeterminato).

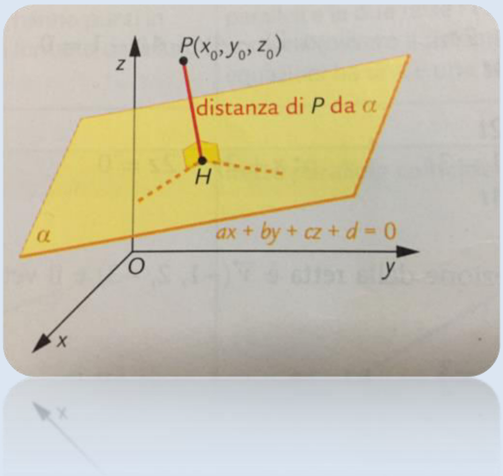
4) Distanza di un punto da un piano o da una retta

Distanza di un punto da un piano

Dato il piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ e un punto P (x_0, y_0, z_0), la distanza del punto dal piano è uguale a:

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$





4a) Distanza di un punto da un piano

ESEMPIO

Siano

$P_0 = (1, 1, 3)$ e $\alpha : x - y + 2z = 0.$

Allora $d(P_0, \pi) = \frac{|1-1+6|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

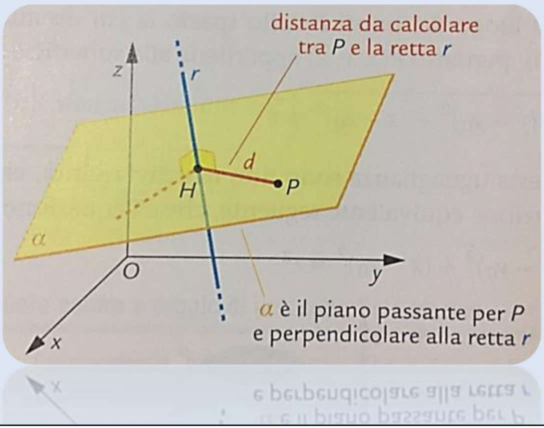
4b) Distanza di un punto da una retta

Con distanza punto retta, o distanza di un punto da una retta, ci si riferisce ad un procedimento che permette di calcolare la distanza di un punto da una retta a partire dalle coordinate del punto dell'equazione della retta.

Definizione di distanza punto retta

Dati un punto P e una **retta r** nello **spazio**, si definisce la distanza punto retta d(P, r) come la minima distanza tra il punto P e tutti i punti che giacciono sulla retta.

D (P, r) = min {d(P, Q) tale che Q ∈ r}



PROCEDIMENTO

Supponiamo di avere una retta r e un punto P_0. Vorremmo ricondurci a una situazione simile a quella nel piano, dove è facile calcolare la distanza di un punto da una retta – siccome dare una retta nel piano è come dare un vettore, a due componenti, ortogonale alla retta.

Dobbiamo anzitutto metterci nella condizione in cui P_0 stia su un piano ortogonale ad r. Quindi, ecco una prima strategia per trovare d(P_0, r):

1. trovare l'equazione del piano α per P_0 ortogonale ad r;
2. trovare il punto di intersezione r ∩ α = {H} (cioè: trovare le coordinate di H risolvendo il sistema! e notare che tale intersezione è davvero solo un punto, perché stiamo chiedendo che la retta sia ortogonale al piano)
3. applicare la distanza fra i due punti e calcolare d(P_0, H): questa sarà la distanza cercata.

5. Superficie sferica e sfera

Equazione di una superficie sferica in forma cartesiana

L' equazione :

$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

rappresenta una superficie sferica a condizione che risulti:

$a^2 + b^2 + c^2 - 4d \geq 0$

in tal caso la superficie sferica ha centro in C $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$ e raggio :

r = $\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 + \left(-\frac{c}{2}\right)^2 - d}$

ATTENZIONE!

Nel caso in cui risulti $a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 0$ la superficie sferica è degenere, ridotta a un solo punto: il centro.

Superficie sferica e sfera

Equazioni di una superficie sferica dati il centro il raggio

L'equazione di una **superficie sferica** di centro $C(x_0, y_0, z_0)$ e raggio r è:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$